Problemas del "Curso de Cálculo para ¿ingenieros?"

Pedro Fortuny Ayuso

Curso 2011/12, EPIG, Gijón. Universidad de Oviedo
E-mail address: fortunypedro@uniovi.es

CAPíTULO 1

Cálculo diferencial en una variable

Ejercicio 1. Comprobar la siguiente igualdad, donde d es un infinitésimo y d_1 es otro (que depende de d):

$$\frac{1}{1+d} = 1 - d + d^2 - d^3 + \cdots + (-1)^n d^n d_1.$$

(esta igualdad se utiliza hasta el agotamiento). Deducir un desarrollo análogo para

$$\frac{1}{A+d}.$$

Ejercicio 2. Calcular los extremos locales y globales de las funciones que se dan en los intervalos indicados:

1. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$ en $[-1, 1]$.
2. $g(x) = \cos(x)$ en $[\pi/2, 3\pi/2]$.
3. $h(x) = x^3 + 3$ en $[-2, 16]$.
4. $k(x) = (x-2)(10-x)$ en $[2, 10]$.

Ejercicio 3. Estudiar la derivabilidad de cada función en el punto correspondiente.

1. La función $f(x)$ definida como
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } x \geq 0 \\ x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$
en el punto $x = 0$.
2. La función $g(x)$ definida como
$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) \text{ si } x \leq 0 \\ x + x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
en el punto $x = 0$.
3. La función $f(x) = x|x|$ en $x = 0$ y en $x = 1$.
4. La función $h(x)$ definida como
$$h(x) = \begin{cases} e^{x-1} \text{ si } x \geq 1 \\ x \text{ si } x < 1 \end{cases}$$
en el punto $x = 1$.

5. La función $P(t)$ definida como

$$P(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi t) \text{ si } t \geq 1 \\ 1 - t \text{ si } t < 1 \end{cases}$$

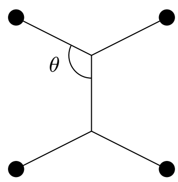
en el punto $t = 1$.

Ejercicio 4. Se sabe que una función $f(x)$ vale 2 en $x = 0$ y en $x = 5$. Además, se sabe que el único punto en el que la derivada de $f(x)$ es cero es $x = 3$. Hacer un esquema de todas las posibles gráficas de dicha función. Si se sabe que $f''(3) = -4$, ¿puede la función tomar algún valor negativo entre $x = 0$ y $x = 5$? ¿por qué?

Ejercicio 5. Se sabe que una función $Q(u)$ es convexa para $u \in [-1, 1]$ y que toma los siguientes valores: $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 4$. ¿Es posible que $f(1/2) = 7/2$? ¿por qué? ¿puede ser $f(-1/2) = 0$? ¿por qué? (Es decir, explicar por qué no, si es que no o dar un ejemplo si es que sí).

Ejercicio 6. ¿Puede una función convexa tener una asíntota horizontal en $+\infty$? ¿Puede una función convexa creciente tener una asíntota horizontal en $+\infty$?

Ejercicio 7. Hay cuatro ciudades formando un cuadrado y se quieren unir mediante una red de carreteras rectas de manera que se pueda ir a todas desde todas y que la distribución sea simétrica respecto de un eje de simetría, como en la figura. Calcular la longitud mínima de la red de carreteras. ¿Cuál es el ángulo θ?



Ejercicio 8. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$i)\ \sqrt{\cos(x^3)} \quad ii)\ e^x \log(x) \quad iii)\ (e^x)^{(e^x)}$$

$$iv)\ \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad v)\ \log(\log(x)) \quad vi)\ \frac{1}{x-2}$$

Ejercicio 9. Calcular las derivadas $n-$ésimas de las siguientes funciones (m es un número natural, λ un número real):

$$i)\ x^m \quad ii)\ \log(1+x) \quad iii)\ \cos(x) \quad iv)\ \frac{1}{1+x}$$

$$v)\ e^x \quad vi)\ \frac{1}{1+x^2} \quad vii)\ e^{-x^2} \quad viii)\ x^\lambda$$

Ejercicio 10 (Apostol, pág. 227)**.** Comprobar que en la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$, la cuerda (recta) que une los puntos sobre $x = a$ y $x = b$ es paralela a la tangente en el punto sobre $x = \frac{a+b}{2}$.

Ejercicio 11 (ídem)**.** Aplicando el Teorema de Rolle, comprobar que la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, cualquiera que sea el valor de b.

Ejercicio 12 (ídem)**.** Se define la función f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} \text{ si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Dibujar la gráfica de $f(x)$ para $x \in [0, 2]$.
b) Comprobar que f satisface las condiciones del Teorema del Valor Medio en $[0, 2]$ y determinar todos los valores medios a que se refiere el teorema.

Ejercicio 13 (ídem)**.** Probar que $x^2 = x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ se verifica exactamente para dos valores de x.

Ejercicio 14 (Apostol, pág. 237)**.** Comprobar que, dado un área A, el cuadrado es el rectángulo de menor perímetro.

Ejercicio 15 (ídem)**.** Tomemos un cuadrado C de lado L. Comprobar que entre todos los cuadrados *inscritos* en C, el de área mínima tiene lado $\frac{1}{2}L\sqrt{2}$. Dar una descripción gráfica del problema y su planteamiento.

Ejercicio 16 (ídem)**.** Dado un cono circular recto de radio R y altura H, hallar el radio y la altura del cilindro circular recto de mayor área lateral que puede *inscribirse* en el cono. Dar una representación gráfica del problema y su planteamiento.

Ejercicio 17 (ídem)**.** Hallar el rectángulo de mayor área posible que puede inscribirse en un semicírculo teniendo la base sobre el diámetro. Dar una representación gráfica del problema y su planteamiento.

Ejercicio 18 (ídem)**.** Hallar el *trapecio* de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo teniendo la base mayor sobre el diámetro. Dar una representación gráfica del problema y su planteamiento.

Ejercicio 19 (Apostol, pág. 238)**.** Se dobla una página de papel de manera que la esquina inferior derecha toca el lado izquierdo. Si la anchura de la página es de $210mm$, calcular la longitud *mínima* del pliegue (es decir, del lado *inclinado* que aparece). Se supone que la página es lo suficientemente larga como para que este quepa sin llegar al borde. ¿Qué ángulo forma este pliegue con el lado derecho?

Ejercicio 20 (ídem)**.** Una ventana está formada por un rectángulo en la base y un semicírculo en la parte superior (de diámetro igual al lado horizontal del rectángulo, *claro*). La parte rectangular es totalmente transparente, mientras que la semicircular es semitransparente. Si el perímetro de la ventana ha de ser P, calcular las dimensiones de la ventana que deja pasar más luz.

Ejercicio 21 (ídem)**.** Un trozo de madera de $12m$ de largo tiene forma de tronco de cono circular recto de diámetros 4 y $4+h$ decímetros, donde $h \geq 0$. Determinar (en función de h) el volumen del mayor cilindro circular recto que se puede cortar de dicho tronco, de manera que su eje coincida con el del tronco.

Ejercicio 22 (Apostol, pág. 239)**.** Dados n números reales $a_1, \dots, a_n$, comprobar que la suma $\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$ es mínima cuando x es la media aritmética de $a_1, \dots, a_n$.

Este ejercicio significa (en castellano) que el centro de masas es el punto que está "lo más cerca posible de todos los puntos" (es el que minimiza la suma de distancias).

Ejercicio 23. Calcular desarrollos de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados (y de orden $2, 3, n \dots$).

- En el punto $x = 1$, $f(x) = \log(x)$.
- En $x = 0$, $h(t) = \log(1 + t)$. ¿qué relación tiene con el anterior?
- La función e^x en $x = 0$.
- La función $\cos(x)$ en $x = \pi$.
- En $u = 0$, $\tan(u)$.
- Cerca de $x = 0$ y de $x = 1$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Ejercicio 24 (Apostol, pág. 372)**.** Una cantidad P de euros se deposita en un banco a interés compuesto al r por uno anual, acumulándose el interés m veces al año. Demostrar que el capital obtenido al pasar n años es $(1+r/m)^{mn}P$. Si r y n se mantienen fijos, comprobar que esta cantidad tiende a e^{rn} cuando $m \to \infty$. Se define entonces el *interés continuo* r como la inversión que da lugar a una cantidad $f(t)$ que es, para cada t años $f(t) = f(0)e^{rt}$, donde $t \geq 0$. Calcular aproximadamente el tiempo necesario para que una cantidad de dinero se duplique colocándola al 6 % anual a interés compuesto, tanto de manera continua como por trimestres (es decir, hay que hacer dos cálculos).

CAPíTULO 2

Cálculo integral de una variable

Ejercicio 25 (Apostol, pág. 102)**.** Calcular cada una de las integrales siguientes:

$\int_0^3 x^2\,dx$	$\int_{-3}^3 x^2\,dx$
$\int_0^2 4x^3\,dx$	$\int_{-2}^2 4x^3\,dx$
$\int_0^1 5t^4\,dt$	$\int_{-1}^1 5t^4\,dt$
$\int_0^1 (5x^4-4x^3)\,dx$	$\int_{-1}^1 (5x^4-4x^3)\,dx$
$\int_{-1}^2 (t^2+1)\,dt$	$\int_2^3 (3x^2-4x+2)\,dx$
$\int_0^{1/2} (8t^3+6t^2-2t+5)\,dt$	$\int_{-2}^4 (u-1)(u-2)\,du$
$\int_{-1}^0 (x+1)^2\,dx$	$\int_0^{-1} (x+1)^2\,dx$
$\int_0^2 (x-1)(3x-1)\,dx$	$\int_0^2 \lvert(x-1)(3x-1)\rvert\,dx$
$\int_0^3 (2x-5)^3\,dx$	$\int_{-3}^3 (x^2-3)^3\,dx$
$\int_0^5 x^2(x-5)^4\,dx$	$\int_{-2}^{-4} (x+4)^{10}\,dx$

Ejercicio 26 (Apostol, pág. 269)**.** Calcular las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

$\int x\,\mathrm{sen}(x)\,dx$	$\int x^2\,\mathrm{sen}(x)\,dx$
$\int x^3\cos(x)\,dx$	$\int x^3\,\mathrm{sen}(x)\,dx$
$\int \mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx$	$\int x\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx$

Ejercicio 27 (Apostol, pág. 271)**.** Hallar un entero n tal que

$$n\int_0^1 f''(2x)\,dx = \int_0^2 tf''(t)\,dt.$$

Por otro lado, calcular

$$\int_0^1 xf''(2x)\,dx$$

sabiendo que $f(0) = 1$, $f(2) = 3$ y $f'(2) = 5$.

Ejercicio 28 (Apostol, pág. 103)**.** Hallar un polinomio cuadrático P (es decir, de grado dos) para el cual $P(0) = P(1) = 0$ y $\int_0^1 P(x)\,dx = 1$.

Ejercicio 29 (ibíd.)**.** Hallar un polinomio cúbico (es decir, de grado tres), P para el cual $P(0) = P(-2) = 0$, $P(1) = 15$ y $3\int_{-2}^0 P(x)\,dx = 4$.

Ejercicio 30 (ibíd.)**.** Sea f una función definida en $[-b, b]$. Se dice que es *par* si $f(-x) = f(x)$ y se dice que es *impar* si $f(-x) = -f(x)$. Comprobar que, si f es integrable, entonces

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0 \text{ si } f \text{ es impar,}$$

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx \text{ si } f \text{ es par.}$$

Ejercicio 31 (Apostol, pág. 116)**.** Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = cx^3$ para $c > 0$ se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1/c, 1/c^2)$. Determinar c de manera que el área comprendida entre ambas gráficas sobre el intervalo $[0, 1/c]$ sea $2/3$.

Ejercicio 32 (ibíd.)**.** Sean $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = ax$. Determinar a para que la región situada por encima de la gráfica de g y por debajo de la de f tenga área $9/2$.

Ejercicio 33 (Apostol, pág. 117)**.** La ecuación de una elipse de radios a y b es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Utilizar las propiedades de la integral (p.ej. el Teorema del Cambio de Variable) para comprobar que la región delimitada por una elipse es πab.

Ejercicio 34 (Apostol, pág. 140)**.** Aplicar la integración para calcular el volumen de un cono circular recto engendrado al girar alrededor del eje OX la gráfica de la función $f(x) = cx$ en el intervalo $0 \leq x \leq b$. Comprobar que la fórmula es un tercio del área de la base por la altura.

Ejercicio 35 (Apostol, pág. 141)**.** Calcular el volumen del sólido engendrado al girar el conjunto definido por la función $f(x)$ alrededor del eje OX entre los límites indicados.

$f(x) = \sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 1$	$f(x) = x^{1/4},\ 0 \leq x \leq 1$
$f(x) = x^2,\ -1 \leq x \leq 2$	$f(x) = \operatorname{sen}(x),\ 0 \leq x \leq \pi$
$f(x) = \cos(x),\ 0 \leq x \leq \pi/2$	$f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x),\ 0 \leq x \leq \pi.$

Para las siguientes, dibujar la región entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ y calcular el volumen del sólido generado al rotar esas regiones alrededor del eje OX en el intervalos indicados:

$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2, 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), g(x) = \cos(x), 0 \leq x \leq \pi/4$$

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, g(x) = 1, 0 \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Ejercicio 36 (ibíd.)**.** ¿Qué volumen de material se quita de una esfera de radio $2r$ cuando se atraviesa con un taladro formando un agujero centrado de radio r?

Ejercicio 37 (ibíd.)**.** Un sólido tiene una base circular de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.

Ejercicio 38 (ibíd.)**.** Las secciones transversales de un sólido por planos perpendiculares al eje OX son cuadrados con centro en el eje. Si al cortar por un plano perpendicular en el punto de abscisa x, se obtiene un cuadrado de lado $2x^2$, calcular el volumen del sólido entre $x = 0$ y $x = a$. Dibujar un esquema.

Ejercicio 39 (Apostol, pág. 144)**.** Si una fuerza de $10N$ alarga un muelle $1cm$, ¿qué trabajo se realiza al alargar el muelle $30cm$?

Ejercicio 40 (ibíd.)**.** Un muelle tiene en reposo una longitud de $1m$. Una fuerza de $100N$ lo comprime hasta $0{,}9m$ ¿Qué trabajo hace falta para comprimirlo hasta $0{,}5m$? ¿Qué longitud tiene cuando se realiza un trabajo de $20J$?

Ejercicio 41 (ibíd.)**.** Una partícula se mueve a lo lardo del eje OX mediante una fuerza impulsora $f(x) = 3x^2 + 4x$ newtons. Calcular el trabajo realizado por dicha fuerza para llevar la partícula desde $x = 0m$ hasta $x = 7m$.

Ejercicio 42 (ibíd.)**.** Un cable de $50m$ de longitud y $4kg$ de peso por metro cuelga de un torno. Calcular el trabajo realizado al enrollar $25m$ de cable (tener en cuenta solo la fuerza de la gravedad).

Ejercicio 43 (ibíd.)**.** Sea $V(q)$ el voltaje necesario para situar una carga q en las placas de un condensador. El trabajo necesario para cargar un condensador desde $q = a$ hasta $q = b$ se define como $\int_a^b V(q)\,dq$. Si el voltaje es proporcional a la carga, comprobar que el trabajo realizado para situar una carga Q en un condensador descargado es $\frac{1}{2}QV(Q)$.

Ejercicio 44 (Apostol, pág. 147)**.** En los siguientes casos, calcular el *promedio* $A(f)$ para la función dada en el intervalo correspondiente.

$f(x) = x^2,\ a \leq x \leq b$	$f(x) = x^2 + x^3,\ 0 \leq x \leq 1$
$f(x) = x^{1/2},\ 0 \leq x \leq 4$	$f(x) = x^{1/3},\ 1 \leq x \leq 8$
$f(x) = \operatorname{sen}(x),\ 0 \leq x \leq \pi/2$	$f(x) = \cos(x),\ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$
$f(x) = \operatorname{sen}(2x),\ 0 \leq x \leq \pi/2$	$f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x),\ 0 \leq x \leq \pi/4$
$f(x) = \operatorname{sen}^2(x),\ 0 \leq x \leq \pi/2$	$f(x) = \cos^2(x),\ 0 \leq x \leq \pi$

Ejercicio 45 (Apostol, pág. 148)**.** Determinar una densidad de masa ρ tal que el centro de gravedad de una varilla de longitud L quede situado a una distancia $L/4$ de uno de los extremos.

Ejercicio 46 (ibíd.)**.** En un circuito eléctrico, el voltaje $e(t)$ en el tiempo t viene dado por la fórmula $e(t) = 3\operatorname{sen}(2t)$. Calcular: (a) el voltaje medio en el intervalo de tiempo $[0, \pi/2]$; (b) la media cuadrática del voltaje; es decir, la raíz cuadrada del promedio de la función $e(t)^2$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Ejercicio 47 (ibíd.)**.** En un circuito eléctrico, el voltaje $e(t)$ y la intensidad de la corriente $i(t)$ vienen dados por las fórmulas $e(t) = 160\operatorname{sen}(t)$, $i(t) = 2\operatorname{sen}(t - \pi/6)$. La potencia media se define por la fórmula

$$\frac{1}{T}\int_0^T e(t)i(t)\,dt,$$

donde T es el periodo del voltaje y la intensidad. Determinar T en este caso y calcular la potencia media.

Ejercicio 48 (Apostol, pág. 272)**.** Una función f definida para todo número real positivo satisface la ecuación $f(x^2) = x^3$ para $x \geq 0$. Determinar $f'(4)$.

Ejercicio 49 (ibíd.)**.** Una función g definida para todo número real positivo satisface las condiciones siguientes: $g(1) = 1$ y $g'(x^2) = x^3$ para todo $x \geq 0$. Calcular $g(4)$.

Ejercicio 50 (ibíd.)**.** Explicar por qué

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{1+t}\, dt \geq 0$$

para cualquier $x \geq 0$.

CAPíTULO 3

Varias variables

Ejercicio 51. Calcular la diferencial de las siguientes funciones de dos variables:

x^2+y^2	x^2-y^2
$\cos(xy)$	$\operatorname{sen}(x+y)$
e^{x+y}	e^{xy}
$\frac{xy}{1+x^2+y^2}$	$\log(x^2+y^2+1)$
$x\cos(y)+y\operatorname{sen}(x)$	$\frac{\cos(x)}{y^2+1}$

Ejercicio 52. Calcular la diferencial de las siguientes funciones de tres variables:

$x^2+y^2+z^2$	x^2-y^2z
$\cos(xyz)$	$\operatorname{sen}(x-2y+3z)$
e^{x+y+z}	e^{xyz}
$\frac{z}{1+x^2+y^2}$	$\log(x^2+y^2+z^2+1)$
$x\cos(z)+y\operatorname{sen}(x)-z$	$\frac{\cos(x)z}{y^2+1}$

Ejercicio 53. Calcular los gradientes de las siguientes funciones en los puntos en que se indica. Calcular también la ecuación del (hiper)plano tangente a cada una de las gráficas de las funciones correspondientes.

$x^2+y^2+z^2$ en $(0,1,0),(0,0,0)$
$\cos(x)\sin(y)$ en $(\pi,\pi/2),(\pi/2,-\pi/4),(-\pi/3,\pi/4)$
$\log(z^2+1)x+ye^x$ en $(0,0,0),(0,-1,1),(2,1,3)$
$\frac{xy}{1+z^2}$ en $(0,0,0),(1,2,0),(0,2,-1)$
$x^3+y^3+z^3$ en $(1,2,3),(-1,-2,-3),(0,1,2)$
xy en $(0,0),(1,0),(-2,3)$
$\sin(x)+\cos(y)$ en $(\pi,\pi/2),(\pi/2,-\pi)$

Ejercicio 54. ¿Por qué utilizar la diferencial es “poco útil” para aproximar los valores de una función cerca de un punto crítico?

Ejercicio 55. Se sabe que el gradiente de una función $f(x,y,z)$ es $(-1,-1,-1)$ en el punto $(2{,}95,-1{,}1,4{,}03)$ y que la función es positiva en ese punto. ¿Es razonable pensar que $f(3,-1,4)$ será positiva, negativa o nula? ¿Por qué?

Ejercicio 56. Utilizar la diferencial para calcular valores aproximados de las siguientes expresiones:

$\sqrt{0{,}97^3 + 2{,}03^3}$	$\log(1{,}03^2 + 0{,}99^2)$
$\sin(61°)\cos(29°)$	$1/(0{,}99^2 + 2{,}02^2)$
$e^{0{,}02^2+0{,}03^2}$	$0{,}99/(1 + 1{,}02)$

Ejercicio 57. Se realiza un tiro parabólico sin rozamiento con una velocidad incial de $v = 20m/s$ y un ángulo de $30°$. Se quiere corregir el lanzamiento para que caiga $5m$ más cerca. Se pide (aproximadamente):

- Calcular una corrección del ángulo sin tocar la velocidad.
- Calcular una corrección de la velocidad sin tocar el ángulo.
- Calcular *todas* las correcciones en ecuaciones paramétricas.

En los dos primeros casos, estúdiese el error relativo cometido por la aproximación.

Ejercicio 58. Calcúlese la fórmula de la altura máxima alcanzada por un proyectil en un tiro parabólico sin rozamiento, con velocidad inicial v y ángulo θ (este es un problema *muy sencillo* de energías).

Se realiza un tiro con una velocidad inicial de $20m/s$ y ángulo de $30°$. Se pide (de manera aproximada):

- Calcular un valor de v para el que el lanzamiento alcancance $3m$ más de altura.
- Calcular un valor de θ para el que el lanzamiento alcance $2m$ menos de altura.
- Dar, en paramétricas, las ecuaciones de todos los lanzamientos que alcanzan $1m$ más de altura.

En los dos primeros casos, estudiar el error relativo cometido por la aproximación.

Ejercicio 59. Si $L(v, \theta)$ y $H(v, \theta)$ es la longitud alcanzada por un proyectil en tiro parabólico de velocidad inicial v y ángulo θ, comprobar de alguna manera que el ángulo de $45°$ produce la máxima, fijada la velocidad. ¿Hace falta el Hessiano en este problema? ¿por qué?

Ejercicio 60. La ecuación de la cuota mensual de una hipoteca a un interés *mensual* de $r\,\%$, con un plazo de k meses y un capital inicial C en Eu es

$$cuota = \frac{Cr}{100(1 - (1 + \frac{r}{100})^{-k})}.$$

Se pide:

- Dar la fórmula de la cuota mensual en función del interés *anual en tanto por uno* y del tiempo *en años.*
- Comprobar que la cuota mensual decrece con el tiempo.
- Comprobar que la cuota mensual crece con el interés.

- Se contrata una hipoteca de 200,000Eu al 4 % anual por un periodo de 35 años. Se quiere renegociar para que la couta sea 65Eu más barata, sin tocar el capital hipotecado. ¿Qué se debe hacer? ¿Qué ofrecerá el banco?

Ejercicio 61. Determinar de entre todos los triángulos de igual perímetro $2p$ el que tiene mayor área.

Ejercicio 62. Hallar el paralelepípedo retangular de área total dada S que tenga el volumen máximo.

Ejercicio 63. Hallar el cilindro de área mínima fijado un volumen. ¿Este es un problema de varias variables?

Ejercicio 64 (Bayón-Grau-Suárez 2011, pág. 398)**.** Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Ejercicio 65. Calcular los extremos de las siguientes funciones:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2\\
&f_2(x, y) = e^{x^2+y^2}\\
&f_3(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2 + 2)\\
&f_4(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 18}\\
&f_5(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2\\
&f_6(x, y) = (x + y)^3\\
&f_7(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 66. Calcular la ecuación de la recta tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en cualquier punto (x_0, y_0) en que no sea vertical.

Ejercicio 67. Calcular la ecuación de la recta tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en cualquier punto (x_0, y_0) en que no sea vertical.

Ejercicio 68. Se considera la *lemnsicata de Bernouilli*, dada por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Se pide:

- Calcular los puntos en que la recta tangente es horizontal.

- Calcular, en cualquier punto (x_0, y_0) de la curva, la ecuación de la recta tangente, suponiendo que en ese punto hay una sola tangente y no es vertical.

Ejercicio 69. El *folium de Descartes* es la curva dada por la ecuación

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Se pide:

- Calcular el punto en que la recta tangente es horizontal (téngase en cuenta que en el origen hay "dos" y no es este el punto que se busca.)
- Calcular, en cualquier otro punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta tangente, siempre que no sea vertical (y el punto no sea el origen).

Ejercicio 70 (Bayón-Grau-Suárez 2011, pág. 398)**.** Estudiar los puntos críticos de la función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$ para $z > 0$.