

CLASE DE 26 DE ABRIL DE 2021

GRUPO F MÉTODOS NUMÉRICOS

PEDRO FORTUNY AYUSO

Las instrucciones para la clase de hoy, que es *teórica*, son:

- (1) Leer la sección 5 del capítulo 4 de los [apuntes](#), *excepto* la subsección 5.1.2.
- (2) Ver el [primer](#) vídeo sobre interpolación por mínimos cuadrados.
- (3) Ver el [segundo](#) vídeo.
- (4) Leer el resto de este documento.
- (5) Jugar, *si se quiere*, con el script `beer.m`.

1. INTRODUCCIÓN

En la clase de hoy se introduce la técnica de interpolación aproximada *lineal* por mínimos cuadrados. El adjetivo “lineal” es clave: los mínimos cuadrados no lineales constituyen un problema *muy complejo* que está mucho más allá de lo que se puede explicar en este curso. El desarrollo “teórico” puede verse en los apuntes, aquí lo repaso brevemente.

El objetivo de la interpolación lineal por mínimos cuadrados es: dada una nube de puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$, y dada una familia de funciones g_1, \dots, g_n (con $n < N$: habitualmente N es muy grande y n es relativamente pequeño), encontrar el conjunto de coeficientes a_1, \dots, a_n que hacen mínimo el error cuadrático:

$$\epsilon = (y_0 - f(x_0))^2 + \dots + (y_N - f(x_N))^2,$$

donde $f(x) = a_1 g_1(x) + \dots + a_n g_n(x)$.

Habitualmente, las funciones $g_1(x), \dots, g_n(x)$ corresponden a un *modelo* (físico, económico, químico, matemático) con el que se trata de describir lo mejor posible (con el menor “error cuadrático”) una serie de valores obtenidos experimentalmente.

Finalmente, si se tienen varios modelos para la misma nube de puntos, la manera “ordinaria” de compararlos es mirar cuál da el menor error cuadrático (pues precisamente así se define la interpolación por mínimos cuadrados). El que tenga menor error cuadrático es el “mejor” (desde el punto de vista teórico: a lo mejor un modelo es más razonable que otro desde otro punto de vista).

2. ALGUNOS MODELOS

Un ingeniero conoce —por haberlos estudiado— múltiples modelos lineales.

Ejemplo 1. Si $s(t)$ es el espacio recorrido por un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado, entonces se sabe que

$$x(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2.$$

Por tanto, $x(t)$ sigue un modelo lineal en el que $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = t$ y $g_3(x) = t^2$ cuyos coeficientes son: s_0 (el espacio inicial), v_0 (la velocidad inicial) y $a/2$ (un medio de la aceleración).

Ejemplo 2. El movimiento armónico simple *sin rozamiento* de frecuencia h sigue la siguiente fórmula (donde $x(t)$ es, como arriba, la posición en tiempo t):

$$x(t) = A \cos(ht/(2\pi)) + B \sin(ht/(2\pi))$$

donde A, B son constantes. Por tanto, las funciones g_i son $g_1(t) = \cos(ht/(2\pi))$ y $g_2(t) = \sin(ht/(2\pi))$ (aquí no hay 1).

Ejemplo 3. Puede ocurrir que solo haya una función $g_1(x)$. Si el interés de una inversión es $k\%$ anual, entonces el valor de la inversión en tiempo t , $C(t)$, es:

$$C(t) = A e^{kt/100}$$

y la función $g_1(t) = e^{kt/100}$. En este caso, A es la inversión inicial (que podemos estar intentando conocer).

Ejemplo 4. Podría ocurrir que un modelo debiera simplificarse (es decir, fijar uno de los parámetros), a causa de la fuente de los datos. Por ejemplo: si se sabe *a ciencia cierta* que la aceleración de un cuerpo tiene un valor concreto (digamos 4), entonces dicho valor ha de fijarse en el modelo:

$$x(t) = s_0 + v_0 t + 2t^2,$$

y realizar las operaciones con $x(t)$ con dicho valor fijo (así que solo han de buscarse s_0 y v_0). Pero, en ese caso, la manera de operar es distinta (pues no existe la matriz X , directamente): ha de restarse el valor de la parte fija de la función a los datos. En lugar de y_0, \dots, y_N , se han de utilizar $\tilde{y}_0 = y_0 - 2t^2, \dots, \tilde{y}_N = y_N - 2t^2$, reescribir el modelo como:

$$\tilde{x}(t) = s_0 + v_0 t$$

y hacer las cuentas con este modelo para la nube de las \tilde{y}_i .

CURSO 2020/21, EPIG, GIJÓN. UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Correo electrónico: fortunypedro@uniovi.es