CLASE 2 DE FEBRERO DE 2021
GRUPO F, MÉTODOS NUMÉRICOS

PEDRO FORTUNY AYUSO

Hoy trabajaremos el primer algoritmo basado en teoremas del Cálculo para aproximar raíces de funciones continuas: el de bisección.

Importante — Importante — Importante
Todos los algoritmos que se enuncien en la clase, habrá que saberlos de memoria para los exámenes. Quedará claro cuáles son. Han de saberse tal y como están en los apuntes (no como se expliquen en la pizarra, pues es más sucio y menos organizado).

Como veréis, es un método elemental pero tiene una ventaja enorme sobre otros. La más importante: se puede calcular, a priori, sin hacer ninguna cuenta complicada, cuánto se acerca uno efectivamente a la solución exacta en cada paso. Esto puede ser muy útil. Vuestro trabajo:

(1) Ver el vídeo descriptivo del algoritmo.
(2) Ver el vídeo sobre la buena aproximación a la solución.

No hay muchos ejercicios en mi listado que se refieran a este método, porque todos son más o menos iguales. Pongo un ejemplo aquí:

Ejercicio 1. Realizar tres pasos del algoritmo de bisección para calcular una raíz aproximada de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ que sea positiva. Según el intervalo que elijas, ¿cuántos pasos hace falta para estar seguro de tener 4 cifras decimales exactas?

Solución. Primero de todo, necesitamos un intervalo *en que la función cambie de signo* y que ese intervalo tenga los dos extremos positivos, por lo que nos pide el enunciado. En 0 la función es $f(0) = 1$, positiva. En 1, la función vale $f(1) = 1$, negativa. Así pues, el intervalo $[a, b] = [0, 1]$ sirve para el enunciado.

Paso por paso:

(1) Se calcula $c = (a + b)/2 = 1/2$. Aquí la función vale $f(1/2) = 3/8$, que es negativo. Como $f(a)$ ¿ 0, tenemos que cambiar b y obtenemos el intervalo $[a, b] = [0, 1/2]$.
(2) Se calcula $c = (a + b)/2 = 1/4$. Aquí se tiene $f(1/4) = 17/64$, que es positivo. Como $f(a)$ ¿ 0, tenemos que cambiar a y obtenemos el intervalo $[a, b] = [1/4, 1/2]$.
(3) Finalmente, $c = (1/4 + 1/2)/2 = 3/8$, donde $f(3/8) = 37/512$, que es negativo. En realidad hemos terminado al calcular la c.

Fecha: February 9, 2021.

Para seguir, ahora hay que cambiar b porque $f(a)$ ¿ 0, y quedaría $[a, b] = [1/4, 3/8]$.

Sobre el número de iteraciones: $a = 0$, $b = 1$, por lo que $b\ \ a = 1$. Para que haya 4 dígitos decimales exactos, el error debe ser menor que $1/10000$. Por tanto, hemos de garantizar (sin tener más información) que, si n es el número de pasos,

$$(b\ \ a)/2^n \text{ ¡ } 1/10000\ \ 2^n \text{ ¿ } 10000\ \ n\ \ 14,$$

con catorce pasos aseguramos dicha precisión (podrían ser menos pero no lo podemos saber). (Es bueno conocer las potencias de 2 hasta 16, por lo menos).

Curso 2020/21, EPIG, Gijón. Universidad de Oviedo
Correo electrónico: fortunypedro@uniovi.es