CLASE DEL 12 DE FEBRERO DE 2021
GRUPO F, MÉTODOS NUMÉRICOS

PEDRO FORTUNY AYUSO

La clase de hoy contiene un algoritmo importante (el de la secante), *que entra en los algoritmos del examen* y otro también importante pero al que doy menos valor en este curso porque es demasiado técnico (el del punto fijo); este segundo *no entra en el examen*; termino la clase (y el tema) con un ejercicio de Newton-Raphson en que la derivada no es creciente, para que veáis que hay que tomar el valor absoluto.

IMPORTANTE — IMPORTANTE — IMPORTANTE — IMPORTANTE En los ejercicios 13 y 14 no tomaba el valor absoluto. El argumento era correcto porque tanto la derivada como la derivada segunda eran positivas. He corregido las dos redacciones para que quede claro que es el valor absoluto.

Vuestro trabajo:

(1) Ver el vídeo del método de la secante.
(2) Ver el vídeo del método del punto fijo.
(3) Hacer el ejercicio que sigue. Es importante que *intentéis hacerlo vosotros antes de leer la solución*.

Ejercicio 1. Buscar una semilla para encontrar, con el algoritmo de Newton-Raphson, una raíz positiva de la función $f(x) = 3x - x^3 + 1$ con un error menor que 10^{-6} y decir cuántos pasos hacen falta para alcanzar esa precisión.

Solución. Importante: el enunciado no pide encontrar la raíz con esa precisión: solo decir cuántos pasos hacen falta, una vez que se tiene una semilla. También es importante observar que los razonamientos iniciales son *intuitivos*.

Solo se nos pide una raíz positiva. Busquemos un intervalo de números positivos en que la función cambie de signo. Veamos: $f(0) = 1$, $f(2) = -1$. Para tener algo mejor, probemos $f(1) = 3$. Por tanto, la función cambia de signo entre 1 y 2. Esto ya es algo. Veamos a dónde vamos con $x_0 = 1$. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3 - 3x^2$. **¡Boum!:** $f'(1) = 0$, el $x_0 = 1$ no sirve como semilla porque la derivada es 0.

Fecha: 12 de febrero de 2021.

Pues nada, probemos con $x_0 = 2$. $f'(2) = 3 - 12 = -9$.

$$x_1 = 2 - \frac{-1}{-9} = \frac{17}{9} \simeq 1.889,$$

que está bastante cerca de x_0, lo cual parece bueno. Como $f(x_1) < 0$, vamos a ver si cambia de signo un poco antes: resulta que $f(16/9) > 0$, así que entre $16/9$ y $17/9$ hay una raíz. La distancia entre ambos es $1/9$, que es relativamente pequeña. Veamos qué ocurre con la derivada y derivada segunda.

Por un lado, $f'(x) = 3 - 3x^2$, que es *decreciente* para $x > 0$. Por otro lado, $f''(x) = -6x$, que también es *decreciente* para $x > 0$. Por este motivo, en el intervalo $[16/9, 17/9]$, se tiene que

(1) Para la derivada, $|f'(x)| > |f'(16/9)| = 175/27$.

(2) Para la segunda derivada, $|f''(x)| < |f''(17/9)| = 34/3$.

Por tanto, como $|x_1 - c| < 1/9$, y como

$$\sqrt{\frac{34/3}{2 \cdot 175/27}} < 0.9$$

se obtiene que, usando $x_0 = 2$, para cada iteración n:

$$|x_n - c| \leq (0.9 \cdot 1/9)^{2^{n-1}} = 0.1^{2^{n-1}}$$

y como se nos pide que el error sea menor que 10^{-6}, hemos de obtener

$$2^{n-1} > \frac{\log(10^{-6})}{\log(10^{-1})} = 6,$$

es decir, basta con que $n - 1 = 3$: en la cuarta iteración el error ya es seguro menor que 10^{-6}. $\square$

Curso 2020/21, EPIG, Gijón. Universidad de Oviedo
Correo electrónico: fortunypedro@uniovi.es