CLASE DE 23 DE MARZO DE 2021
GRUPO F MÉTODOS NUMÉRICOS

PEDRO FORTUNY AYUSO

Hoy veréis un vídeo con un ejercicio del método de Heun y otro conuna comparación entre las soluciones de un problema de condición inicial con este método, el de Euler, y las exactas. Después trabajaréis vosotros el método de Euler y el de Heun, para lo que hay dos ejercicios completamente desarrollados en este texto.

(1) El vídeo con el ejercicio de Heun.
(2) El vídeo comparativo.

Y a continuación el texto detallado.

Como ya habréis visto, los ejercicios 60 y 63 son para que cojáis la mecánica tanto de Euler como de Heun.

1. Un comentario sobre la condición inicial y el número N de iteraciones

Hay veces en que un problema de condición inicial aproximado viene enunciado con $y(x_0) = y_0$, donde x_0 no es 0: es decir "se empieza" en un lugar distinto de 0 en la variable independiente.

Además, puede ocurrir que, en lugar de darnos el paso h y el número de pasos, nos digan el intervalo $I = [a, b]$ en que se quiere calcular la solución aproximada y el número de pasos n, sin más (habitualmente "equiespaciados").

En ese caso, el paso es fácil de computar:

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Y el valor inicial es exactamente y_0, lo que ocurre que la variable independiente comienza en a y no en 0. En estos casos, además, la variable independiente no toma los valores $0, h, 2h, \dots$, sino otros $a, a+h, a+2h$, etc. Estos valores, en lugar de ir con las h, se indican con subíndices en la x: $x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, \dots$: el subíndice indica el paso al que corresponden.

Veamos un ejemplo.

2. Un ejemplo de Euler

Tomemos la cuarta ecuación del ejercicio 59 y calculemos la solución aproximada de Euler en dos pasos, como dice el ejercicio 60. Tenemos

$$y' = \frac{y}{t^2},\ t \in [1, 2],\ y(1) = 1$$

y se nos dice que se han de hacer dos pasos equiespaciados. Veamos:

Fecha: 19 de marzo de 2021.

- La variable independiente es t, no x: esto no es problema.
- La función $f(t,y)$ es y/t^2. (Por eso no se puede empezar en $t=0$, no está definida en 0).
- El intervalo de trabajo es $[1,2]$, y la condición inicial y_0 está dada, por tanto, en $x_0=1$, y resulta que es $y(1)=1$, tampoco es problema.
- No se nos da h, pero como los nodos (i.e. el lugar en que se calculan las soluciones aproximadas) son equiespaciados, queda
$$h=\frac{2-1}{2}=0.5.$$

Con esto ya podemos hacer los cálculos de Euler (y Heun, y lo que haga falta).

(1) Paso 1. El valor $\tilde{y}_0$ es $\tilde{y}_0 = y_0 = 1$, la condición inicial. La pendiente ahí es:
$$f(t_0,\tilde{y}_0)=\frac{y_0}{t_0^2}=1/1^2=1.$$
Por tanto, el siguiente valor de Euler es:
$$\tilde{y}_1=\tilde{y}_0+hf(t_0,\tilde{y}_0)=1+0.5\cdot 1=1.5.$$
Téngase en cuenta que ahora t_1 (la coordenada horizontal correspondiente al siguiente paso) es $t_0+h=1.5$.

(2) Paso 2. Sabemos que $t_1 = 1.5$ y que $\tilde{y}_1 = 1.5$. La pendiente ahí es
$$f(t_1,\tilde{y}_1)=\frac{\tilde{y}_1}{t_1^2}=1.5/(1.5^2)=0.6667,$$
así que el siguiente valor aproximado es
$$\tilde{y}_2=\tilde{y}_1+h\cdot f(t_1,\tilde{y}_1)=1.5+0.5\cdot 0.6667=1.8333.$$

Se nos pide calcular el error relativo y absoluto (siempre es al final del proceso, no en cada punto) comparado con la solución exacta, que se nos da arriba: $y(t)=ke^{-1/t}$. Hace falta calcular la k (depende de la condición inicial). En este caso
$$y(1)=1=ke^{-1/1}=k/e,$$
por tanto $k=e$ para nuestro problema de condición inicial. Así que la solución exacta es:
$$y(t)=e\cdot e^{-1/t}=e^{1-1/t}.$$
El valor de esta función en $t=2$ es
$$y(2)=1.6487.$$

Por tanto, si E_a es el error absoluto y E_r el relativo:

$$E_a = |1.8333 - 1.6487| \simeq 0.1846,\ E_r = \frac{0.1846}{1.6487} \simeq 0.112$$

que es bastante (alrededor de un 10%), normal para Euler.

3. Un ejemplo de Heun

Tomemos el caso 5 del Ejercicio 59 y hagamos 2 pasos de Heun equiespaciados.

El problema de condición inicial es

$$y' = 2t, y(0) = 1$$

con intervalo $t \in [0,2]$. De ahí sale que $f(t,y) = 2t$ y que $y_0 = \tilde{y}_0 = 1$. Se pide hacer dos pasos equiespaciados. Esto nos dice que $h = (2-0)/2 = 1$.

(1) Primer paso: $t_0 = 0, \tilde{y}_0 = y(0) = 1$. Por etapas, como siempre:
   (a) $m_e = f(t_0, y_0) = 2t_0 = 0$; por lo tanto
   $$y_e = y_0 + h \cdot m_e = 1 + 1 \cdot 0 = 1.$$
   (b) $m_f = f(t_0 + h, y_e) = 2 \cdot 1 = 2$.
   (c) Por tanto,
   $$m = \frac{m_e + m_f}{2} = \frac{0+2}{2} = 1.$$
   (d) Conclusión:
   $$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + h \cdot m = 1 + 1 \cdot 1 = 2.$$

(2) Segundo paso: $t_1 = 1$, $\tilde{y}_1 = 2$. Por etapas:
   (a) $m_e = f(t_1, \tilde{y}_1) = 2 \cdot 1 = 2$; Por ello
   $$y_e = \tilde{y}_1 + h \cdot m_e = 2 + 1 \cdot 2 = 4.$$
   (b) $m_f = f(t_1 + h, y_e) = 2 \cdot 2 = 4$.
   (c) Por tanto,
   $$m = \frac{m_e + m_f}{2} = \frac{2+4}{2} = 3.$$
   (d) Conclusión:
   $$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + h \cdot m = 2 + 1 \cdot 3 = 5.$$

Por otro lado, la solución exacta es $y(t) = t^2 + k$. Necesitamos conocer el valor de la constante, que sale de la condición inicial $y(0) = 1$. Queda:

$$y(0) = 1 = 0^2 + k$$

por tanto, $k = 1$ y la solución exacta es $y(t) = t^2 + 1$.

El valor de $\tilde{y}_2$ es una aproximación al valor $y(t)$ con $t = 2$ (porque hemos calculado la solución aproximada para $t \in [1, 2]$). El error absoluto E_a y el error relativo E_r en $t = 2$ son:

$$E_a = |\tilde{y}_2 - y(2)| = 5 - 5 = 0. \, E_r = 0$$

(si el error absoluto es 0, el error relativo es 0).

No es sorprendente que la aproximación sea el valor exacto: la ecuación diferencial es realmente una integral de una función lineal y esto, el algoritmo de Heun lo resuelve de manera exacta.

CURSO 2020/21, EPIG, GIJÓN. UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Correo electrónico: `fortunypedro@uniovi.es`