CLASE DE 20 DE ABRIL DE 2021
GRUPO F MÉTODOS NUMÉRICOS

PEDRO FORTUNY AYUSO

En esta clase se explica la construcción de los "splines cúbicos" de una nube de puntos. Más que la pura construcción algebraica (que *siempre se hace con ayuda de un ordenador*), lo que importa es que el alumno sea consciente de: su importancia a la hora de interpolar colecciones de valores (nubes de puntos) asociadas a funciones "suaves" (derivables al menos dos veces) y de que *no hay un único spline* para una nube.

El trabajo concreto es:

(1) Leer la primera parte de la Sección 3 del capítulo 4 (Interpolación) de las notas de Internet: las secciones 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 no son necesarias (pero puede ayudar).
(2) Ver el vídeo introductorio a los splines cúbicos.
(3) Ver un vídeo que detalla un ejemplo concreto (para explicitar las ecuaciones que salen y para que se vea que el sistema es lineal y bastante grande, siempre).
(4) Correr el *script* `spline_example.m`, modificando los parámetros, la nube de puntos, etc. Para hacerse una idea de cómo es un spline cúbico.
(5) Hacer el ejercicio propuesto (importante). Estudiar en casa (también importante) el ejercicio 39 del listado de Internet.

Ejercicio 1. Se sabe que un spline cúbico para la nube de puntos $(0,2),(3,1),(5,7)$ está compuesto por dos polinomios, $P_0(x)$ y $P_1(x)$, el primero para $x \in [0,3]$ y el segundo para $x \in [3,5]$. También se sabe que $P_0(x) = -x/3+2$. ¿Se puede decir cuánto vale $P_1(x)$? Si no, ¿qué se puede decir de él?

Solución. En este ejercicio ya se nos da uno de los polinomios. Del otro, $P_1(x)$ se sabe que forma parte de un spline cúbico para la nube, así que tiene que cumplir unas condiciones. Escribamos $P_1(x)$ centrado en $x_1 = 3$:

$$P_1(x) = a_1 + b_1(x-3) + c_1(x-3)^2 + d_1(x-3)^3.$$

Las condiciones impuestas por ser parte de un spline cúbico son:

(1) Pasa por $(3,1)$:

$$P_1(3) = 1 \Rightarrow 1 = a_1.$$

Fecha: 20 de abril de 2021.

(2) Pasa por $(5,7)$:

$$P_1(5) = 7 \Rightarrow 7 = a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 \tag{*}$$

(pues (5-3)=2).

(3) La derivada de $P_1(x)$ en x_1 ha de coincidir con la derivada de $P_0(x)$ en x_1:

$$P_1'(x_1) = P_0'(x_1) \Rightarrow b_1 = -1/3.$$

(4) Finalmente, la derivada segunda de $P_1(x)$ en x_1 ha de coincidir con la de $P_0(x)$ en x_1:

$$P_1''(x_1) = P_0''(x_1) \Rightarrow 2c_1 = 0.$$

De todas estas ecuaciones se deduce que:

$$a_1 = 1, b_1 = -1/3, c_1 = 0$$

y, sustituyendo en la ecuación marcada con (*), queda

$$7 = 1 - 2/3 + 0 + 8d_1,$$

así que $d_1 = 20/24 = 5/6$. Por tanto, $P_1(x)$ está unívocamente determinado. □

CURSO 2020/21, EPIG, GIJÓN. UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Correo electrónico: `fortunypedro@uniovi.es`