

CLASE DE 9 DE ABRIL DE 2021 GRUPO F MÉTODOS NUMÉRICOS

PEDRO FORTUNY AYUSO

El contenido de la clase de hoy es sencillo:

- (1) Ver un [vídeo](#) sobre el problema de la caída libre.
- (2) Leer el resto de este documento (es importante).
- (3) Hacer los ejercicios 63 y 64 de los [problemas](#) de mi página web.
- (4) Si se desea, “jugar” con los archivos `caida_libre.m` y `muelle.m`. El primero hace cálculos de la caída libre con rozamiento proporcional a la velocidad y el segundo, del movimiento armónico simple *amortiguado*. Véanse los códigos. Para poder correr el código hace falta que el archivo de función `heunvector.m` del día 6 de abril esté en el directorio `Documentos\MATLAB`.

1. DE SEGUNDO ORDEN A SISTEMA DE PRIMER ORDEN

En esta clase estudiaréis cómo se transforma una ecuación diferencial de segundo orden (derivada de la Segunda Ley de Newton) en un sistema de ecuaciones de primer orden. Brevemente (ver el vídeo 01-caida-libre.mp4), se actúa así: dada una ecuación diferencial del tipo:

$$y''(x) = P(x, y, y')$$

por ejemplo:

$$y''(x) = x + y^2 - xy'$$

se entiende la derivada segunda como una aceleración. La ecuación se transforma en un *sistema* de ecuaciones de primer orden “creando” una variable nueva (la *velocidad*):

$$v(x) = y'(x)$$

y, por tanto,

$$v'(x) = y''(x).$$

De esta manera, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} y'(x) = v(x) \\ v'(x) = P(x, y(x), v(x)) \end{cases}$$

por seguir con el ejemplo:

$$\begin{cases} y'(x) = v(x) \\ v'(x) = x + y(x)^2 - xv(x) \end{cases}$$

Además, una ecuación de segundo orden necesita *dos* condiciones iniciales (un sistema de dos ecuaciones necesita una condición para cada variable). Esto es fácil de entender: para conocer la posición de un objeto lanzado al aire, hace falta conocer la posición inicial *y la velocidad inicial*.

Las ecuaciones de orden dos siempre se reducen a sistemas en que la primera ecuación es $y' = v$ y la segunda ecuación es $v' = [\dots]$ (entre corchetes la ecuación reescrita con v), así que aplicar Euler o Heun en estos casos es algo más complicado que para una sola ecuación pero menos complicado que para un sistema cualquiera.

2. MOVIMIENTO ARMÓNICO CON AMORTIGUAMIENTO

En breve, si un objeto de masa m está sujeto a un muelle horizontal con constante de Hooke k y hay una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad r , entonces la Segunda Ley de Newton dice que:

$$ma = F_h + F_r$$

donde F_h es la fuerza de Hooke (que es contraria a la elongación) y F_r es la de rozamiento. Llamemos $x(t)$ a la posición del objeto *respecto del punto de reposo del muelle*. Entonces:

$$F_h = -kx(t), F_r = -r\dot{x}(t)$$

y queda

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - r\dot{x}(t).$$

Ecuación de segundo orden que se convierte en

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{r}{m}\dot{x}(t) \end{cases}$$

Solo hacen falta las condiciones iniciales (elongación inicial y velocidad inicial) para tener un PCI y poder resolverlo de manera aproximada.